1.

a) $\lim_{x\to1}\frac{sen(x-1)}{|x-1|}=$ $|x-1|=\begin{cases}1-x & se\ x<1\\ x-1 & se\ x\geq1\end{cases}$

$=\lim_{x\to1^-}\frac{sen(x-1)}{1-x}$ ou $\lim_{x\to1^+}\frac{sen(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^-}-\frac{sen(x-1)}{x-1}$ ou $\lim_{x\to1^+}\frac{sen(x-1)}{x-1}=-1$ ou 1

Logo, não tem limite

b) $\lim_{x\to0}\frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos(\frac{1}{x})(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos(\frac{1}{x})(x+\sqrt{x})}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\cos(\frac{1}{x})(x+\sqrt{x})}{\cancel{x}(x-1)}=$

$=\frac{0}{-1}=0$

Logo, tem limite

c) $\lim_{x\to0}\frac{tg(x)}{x\cos(x)}=\lim_{x\to0}\frac{sen(x)}{x\cos^2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{sen(x)}{x}\times\frac{1}{\cos^2(x)}=$

$=1\times\frac{1}{1}=1$

Logo, tem limite

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x+2^{x+1}}{6^{x-1}+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{6^x}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^x+2\frac{1}{3^x}\right)}{\cancel{6^x}\left(6^{-1}+\left(\frac{e}{6}\right)^x\right)}=\frac{0^+}{+6^{-1+}}=0$

Logo, tem limite

2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:(x<1)\vee(1\leq x<5)\vee(x\geq5)\}$

$=\mathbb{R}$. Para que f seja contínua no seu domínio, $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to5^-}f(x)=$
$=\lim_{x\to5^+}f(x)$.

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(3x-2)=1$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=3$

$\lim_{x\to5^-}f(x)=3$

$\lim_{x\to5^+}f(x)=\lim_{x\to5^+}\left(\frac{1}{5}x^2-2\right)=3$

Logo, f é contínua em todo o seu domínio excepto em $x=1$

3. Para que f seja contínua no seu domínio, $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)$.

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{1-x}=\lim_{x\to1^-}-\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=-2$ $|x-1|=\begin{cases}1-x & se\ x<1\\ x-1 & se\ x\geq1\end{cases}$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

$\lim_{x\to1}f(x)=2$

Logo, f é contínua em todo o seu domínio excepto em $x=1$

NOTA: $D_f=\mathbb{R}$

4.

a) $D=\{x\in\mathbb{R}: (x>3 \wedge -1\leq x-3\leq 1 \wedge x^2-9\neq 0) \vee (x\leq 3 \wedge (x-1)e>0)\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: (x>3 \wedge 2\leq x\leq 4 \wedge x^2\neq 9) \vee (x\leq 3 \wedge x-1>0)\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: (3<x\leq 4 \wedge x\neq -3 \wedge x\neq 3) \vee (x\leq 3 \wedge x>1)\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: 3<x\leq 4 \vee 1<x\leq 3\}$

$=]1,4]$ cqd

b) Para que h seja no seu domínio, $\lim_{x\to 3^-} h(x)=\lim_{x\to 3^+} h(x)$.

$\lim_{x\to 3^-} h(x)=\lim_{x\to 3^-} e^{1-\log[(x-1)e]} = e^{1-(\log 2+\log e)} = e^{\cancel{1}-\log 2 \cancel{-1}} = e^{-\log 2} =$

$=\frac{1}{2}$

5.

a) Se f é contínua em $x=1$, então $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} a\times \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = a\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} \underset{(i)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} =$

(i)

	1	-2	1
1		1	-1
	1	-1	$\boxed{0}$

$=0$

$a\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow a=0$

b) $D_g=\{x\in\mathbb{R}: (x<0 \wedge x^2+1>0) \vee (0\leq x\leq 1) \vee (x>1 \wedge x-1\neq 0)\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x<0 \vee 0\leq x\leq 1 \vee x>1\}$

$=\mathbb{R}$ Para que f seja contínua em todo o seu domínio, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \log(x^2+1)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

Logo, f é contínua em todo o seu domínio

⑥ Seja $f(x) = sen^3(x) + x\cos(x)$

f é contínua em $\mathbb{R}$ pois é uma soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em $[0, \pi]$

$f(0) = sen^3(0) + 0 \times \cos(0) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \underbrace{sen^3(\frac{1}{2})}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2})}_{>0} = \;>0$

$f(\pi) = sen^3(\pi) + \pi \times \cos(\pi) = -\pi$

Como $]\frac{1}{2}, \pi[\subseteq]0, \pi[$, então conclui-se pelo corolário do Teorema de Bolzano que, como $f(\frac{1}{2}) \times f(\pi) < 0$, f tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

⑦

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq \frac{\pi}{6}) \vee (x > \frac{\pi}{6} \wedge \pi \neq 0)\} = \mathbb{R}$

Para que g seja contínua no seu domínio, $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} g(x)$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 1$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} g(x) = \frac{\cancel{6} \times \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{6}}}{\cancel{\pi}} = 1$

Logo, g é contínua em todo o seu domínio, ou seja, é contínua em $\mathbb{R}$.

b) Sendo que g é contínua em $\mathbb{R}$, é também contínua em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$g(-\frac{\pi}{2}) = \cos(-\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{4}{3}\pi) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{6 \times \frac{\cancel{\pi}}{2}}{\cancel{\pi}} = 3$

Como $g(-\frac{\pi}{2}) \times g(\frac{\pi}{2}) < 0$, então, pelo corolário do Teorema de Bolzano conclui-se que existe pelo menos um zero no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Se $x \leq \frac{\pi}{6}$: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$: $x = \frac{5\pi}{12}$ ✓ Para $k = -1$: $x = -\frac{7\pi}{12}$ ✗

Para $k = 1$: $x = \frac{17\pi}{12}$ ✓ Para $k = 2$: $x = \frac{29\pi}{12}$ ✗

Se $x > \frac{\pi}{6}$: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\pi} = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Logo, $\{0, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$ são zeros da função.

8.

a) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : (0 \leq x < 1 \wedge -1 \leq x \leq 1) \vee (x = 1) \vee (3 \neq 0 \wedge 1 < x \leq 4)\}$

$= \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq x < 1 \vee x = 1 \vee 1 < x \leq 4\}$

$= [0, 4]$ Para que h seja contínua no seu domínio, $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1} h(x)$.

$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + \arccos(x))$

$= 2 + 0 = 2$

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+5}{3} = 2$

$\lim_{x \to 1} h(x) = 2$ Logo, h é contínua em todo o seu domínio.

b) Sendo que h é contínua em $[0, 4]$, então também é contínua em $[2, 4]$.

Seja $f(x) = h(x) - x$

$f(2) = \frac{2+5}{3} - 2 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$

$f(4) = \frac{4+5}{3} - 4 = \frac{9}{3} - 4 = -\frac{3}{3} = -1$

Como $f(2) \times f(4) < 0$, então pelo corolário do teorema de Bolzano

conclui-se que $\exists c \in]2, 4[: f(c) = 0 \Leftrightarrow h(c) - c = 0 \Leftrightarrow h(c) = c$ c.q.d.

9.

a) Para que f seja contínua em $x = 2$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 2a) = 2 + 2a$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x(x-2)}{x^2 - 5x + 6} \underset{(i)}{=} \lim_{x \to 2^+} \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} =$

(i)

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

$= \frac{2}{2-3} = -2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2 + 2a = -2$

$\Leftrightarrow 2a = -4$

$\Leftrightarrow a = -2$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2) \vee (x > 2 \wedge x^2 - 5x + 6 \neq 0)\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \vee (x > 2 \wedge x \neq \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2})\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \vee (x > 2 \wedge x \neq \frac{5 \pm 1}{2})\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \vee (x > 2 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3)\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Não se pode aplicar o teorema do valor intermédio de Bolzano no intervalo $[2, 4]$, pois em $x = 3$ a função f não está definida.

10) Seja $h(x) = f(x) - g(x)$.

$h(a) = f(a) - g(a) > 0$ $\quad$ $h(b) = f(b) - g(b) < 0$

Como $h(a) \times h(b) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano verifica-se que os gráficos de f e g se intersetam num ponto de abcissa $c \in]a, b[$.

11)
a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x > 2) \vee (x \leq 2 \wedge x \neq 0)\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Para que f seja contínua no seu domínio, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{2}{x} + 2\right) = \frac{2}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3$

Logo, f é contínua no seu domínio.

b)
$$f'(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)' & \text{se } x > 2 \\ \left(\frac{2}{x} + 2\right)' & \text{se } x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & \text{se } x > 2 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Se $x \leq 2$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{2}{x^2} = 0}_{\text{imp.}}$

Se $x > 2$: $f'(x) = 0 \wedge x > 2$

$\Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x > 2$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x > 2$

$\Leftrightarrow$ —

$f(1) = \frac{2}{1} + 2 = 4$

$f(3) = 3^2 - 1 = 8$

$f(2) = 3$

$\therefore$ mín: $f(2) = 3$
máx: $f(3) = 8$
em $x \in [1, 3]$

NOTA: é necessário enunciar o corolário do teorema de Weierstrass.

12.

a) A função g só está definida quando a sua abcissa pertence ao intervalo $[0,+\infty[$, logo, $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Segundo o Teorema de Weierstrass todo o intervalo fechado e limitado de uma função contínua tem um mínimo e um máximo.

b) Como temos um intervalo não fechado, segundo o teorema de Weierstrass não podemos garantir que a função tenha um máximo e um mínimo.

13.

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -e^{0^-} = -1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \log(0^+) = -\infty$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x<0 \wedge x \neq 0) \vee (x>0 \wedge \overbrace{\frac{1}{1+x^2}>0}^{\mathbb{R}} \wedge 1+x^2 \neq 0)\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x<0 \vee (x>0 \wedge \overbrace{x^2 \neq -1}^{\mathbb{R}})\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$ logo, f é contínua em todo o seu domínio.

c) $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} -e^{\frac{1}{x}} = -e^{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = 0$

Como $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x)$, f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

14. $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \left(1-x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1-0^- \times \mathrm{sen}\left(\frac{1}{0^-}\right) = 1-0=1$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(1-x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1-0^+ \times \mathrm{sen}\left(\frac{1}{0^+}\right) = 1-0=1$

Para que seja um prolongamento de f a $\mathbb{R}$, $g(0)$ tem de ser igual a 1.

15. $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^3-x^2-2x+2}{x^3-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

Sendo $f(x) = x^3-x^2-2x+2$, $g(x) = x^3-x$ e $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, estamos nas condições do teorema de Cauchy.

$f'(x) = 3x^2-2x-2$

$g'(x) = 3x^2-1$

$= \lim_{x\to1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to1^-} \frac{3x^2-2x-2}{3x^2-1} = \frac{3-2-2}{3-1} = \frac{-1}{2}$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}$

$a = -\frac{1}{2}$